**Лабораторные работы 1-4**

**1 Краткие теоретические сведения**

**Методы решения систем линейных алгебраических уравнений**

Будем рассматривать системы уравнений вида:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

где – вектор свободных членов, – вектор неизвестных с вещественными координатами, – вещественная матрица размера n×n, матрица коэффициентов системы.

Эффективность способов решения данной системы во многом зависит от структуры и свойств матрицы А: размера, обусловленности, симметричности, заполненности (т. е. соотношения между числом нулевых и ненулевых элементов), специфики расположения ненулевых элементов матрицы.

**Теорема Кронекера–Капелли**: Необходимым условием существования единственного решения системы (1) является: det A ≠ 0.

**Определение**. Нормой называется такая величина, обладающая свойствами:

1)

2)

3)

Таблица 1 – Виды норм векторов и матриц

|  |  |
| --- | --- |
| В пространстве векторов | В пространстве матриц |
| Кубическая норма | |
|  |  |
| Октаэдрическая норма | |
|  |  |
| Сферическая норма | |
|  |  |

**Метод Гаусса**

Один из методов решения системы (1) – метод Гаусса. Суть метода Гаусса заключается в приведении исходной матрицы А к треугольному виду. Будем постоянно приводить систему (1) к треугольному виду, исключая последовательно сначала х1 из второго, третьего, …, n-го уравнений, затем x2 из третьего, четвертого, …, n-го уравнений преобразованной системы и т. д.

На первом этапе заменим второе, третье, …, n-е уравнения на уравнения, получающиеся сложением этих уравнений с первым, умноженным соответственно на .

Результатом этого этапа преобразований будет эквивалентная (1) система

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

коэффициенты которой (с верхним индексом 1) подсчитываются по формулам

На втором этапе проделываем такие же операции, как и на первом, с подсистемой (2).

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

Продолжая этот процесс, на (n–1)-м шаге так называемого прямого хода метода Гаусса систему (1) приведем к треугольному виду

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

Общая формула для расчета коэффициентов:

где верхний индекс k – номер этапа, , нижние индексы i и j изменяются от k+1 до n. Полагаем, что , .

Структура полученной матрицы позволяет последовательно вычислять значения неизвестных, начиная с последнего (обратный ход метода Гаусса).

…,

Этот процесс можно определить одной формулой

где k полагают равным n, n – 1, …, 2, 1 и сумма по определению считается равной нулю, если нижний предел суммирования имеет значение больше верхнего.

**Оценки погрешностей решения системы**

Приведем оценки погрешностей системы (1).

Пусть A = (aij) – матрица коэффициентов системы,

- ее норма, , – соответственно столбцы свободных членов и неизвестных,

– нормы, и – соответственно их абсолютные и относительные погрешности.

Тогда абсолютная погрешность решения системы (1) имеет оценку:

а относительная погрешность – оценку:

**2 Задание**

Каждая лабораторная работа состоит из двух основных частей:

1 Решение системы уравнений указанным методом с числовыми значениями согласно варианту.

2 Написание программы, выполняющей решение любой системы указанным методом и проверка решения с заданными числовыми значениями.

**Лабораторная работа №1.**

- Решение системы уравнений методом Гаусса.

- Нахождение обратной матрицы для матрицы системы.

- Нахождение оценку абсолютной и относительной погрешности решения, зная, что свободные члены исходной системы имеют абсолютную погрешность 0,001.

**Лабораторная работа №2.**

- Преобразование системы к виду, необходимому для применения метода простых итераций. Нахождение необходимого числа итеративных шагов (k0) для решения системы методом простой итерации с точностью 0,01. Решение системы методом простых итераций.

- Преобразование системы к виду, необходимому для применения метода простых итераций. Решение системы методом Зейделя.

- Проверка условий сходимости методов.

**Лабораторная работа №3.**

- Метод квадратного корня.

**Лабораторная работа №4.**

- Проблема собственных значений.

- Метод вращений Якоби.

- Численное нахождение собственных значений и векторов методом Якоби.

**4 Варианты заданий**

|  |  |
| --- | --- |
| **№** | **Система уравнений** |
| 1 | 4,003 × x1 + 0,207 × x2 + 0,519 × x3 + 0,281 × x4 = 0,425  0,416 × x1 + 3,273 × x2 + 0,326 × x3 + 0,375 × x4 = 0,021  0,297 × x1 + 0,351 × x2 + 2,997 × x3 + 0,429 × x4 = 0,213  0,412 × x1 + 0,194 × x2 + 0,215 × x3 + 3,628 × x4 = 0,946. |
| 2 | 2,591 × x1 + 0,512 × x2 + 0,128 × x3 + 0,195 × x4 = 0,159  0,203 × x1 + 3,469 × x2 + 0,572 × x3 + 0,162 × x4 = 0,280  0,256 × x1 + 0,273 × x2 + 2,994 × x3 + 0,501 × x4 = 0,134  0,381 × x1 + 0,219 × x2 + 0,176 × x3 + 5,903 × x4 = 0,864. |
| 3 | 2,979 × x1 + 0,427 × x2 + 0,406 × x3 + 0,348 × x4 = 0,341  0,273 × x1 + 3,951 × x2 + 0,217 × x3 + 0,327 × x4 = 0,844  0,318 × x1 + 0,197 × x2 + 2,875 × x3 + 0,166 × x4 = 0,131  0,219 × x1 + 0,231 × x2 + 0,187 × x3 + 3,276 × x4 = 0,381. |
| 4 | 3,738 × x1 + 0,195 × x2 + 0,275 × x3 + 0,136 × x4 = 0,815  0,519 × x1 + 5,002 × x2 + 0,405 × x3 + 0,283 × x4 = 0,191  0,306 × x1 + 0,381 × x2 + 4,812 × x3 + 0,418 × x4 = 0,423  0,272 × x1 + 0,142 × x2 + 0,314 × x3 + 3,935 × x4 = 0,352. |
| 5 | 4,855 × x1 + 1,239 × x2 + 0,272 × x3 + 0,258 × x4 =1,192  1,491 × x1 + 4,954 × x2 + 0,124 × x3 + 0,236 × x4 = 0,256  0,456 × x1 + 0,285 × x2 + 4,354 × x3 + 0,254 × x4 = 0,852  0,412 × x1 + 0,335 × x2 + 0,158 × x3 + 2,874 × x4 = 0,862. |
| 6 | 5,401 × x1 + 0,519 × x2 + 0,364 × x3 + 0,283 × x4 = 0,243  0,295 × x1 + 4,830 × x2 + 0,421 × x3 + 0,278 × x4 = 0,231  0,524 × x1 + 0,397 × x2 + 4,723 × x3 + 0,389 × x4 = 0,721  0,503 × x1 + 0,264 × x2 + 0,248 × x3 + 4,286 × x4 = 0,220. |
| 7 | 3,857 × x1 + 0,239 × x2 + 0,272 × x3 + 0,258 × x4 = 0,190  0,491 × x1 + 3,941 × x2 + 0,131 × x3 + 0,178 × x4 = 0,179  0,436 × x1 + 0,281 × x2 + 4,189 × x3 + 0,416 × x4 = 0,753  0,317 × x1 + 0,229 × x2 + 0,326 × x3 + 2,971 × x4 = 0,860. |
| 8 | 4,238 × x1 + 0,329 × x2 + 0,256 × x3 + 0,425 × x4 = 0,560  0,249 × x1 + 2,964 × x2 + 0,351 × x3 + 0,127 × x4 = 0,380  0,365 × x1 + 0,217 × x2 + 2,897 × x3 + 0,168 × x4 = 0,778  0,178 × x1 + 0,294 × x2 + 0,432 × x3 + 3,701 × x4 = 0,749. |

|  |  |
| --- | --- |
| **№** | **Система уравнений** |
| 9 | 3,389 × x1 + 0,273 × x2 + 0,126 × x3 + 0,418 × x4 = 0,144  0,329 × x1 + 2,796 × x2 + 0,179 × x3 + 0,278 × x4 = 0,297  0,186 × x1 + 0,275 × x2 + 2,987 × x3 + 0,316 × x4 = 0,529  0,197 × x1 + 0,219 × x2 + 0,274 × x3 + 3,127 × x4 = 0,869. |
| 10 | 2,958 × x1 + 0,147 × x2 + 0,354 × x3 + 0,238 × x4 = 0,651  0,127 × x1 + 2,395 × x2 + 0,256 × x3 + 0,273 × x4 = 0,898  0,403 × x1 + 0,184 × x2 + 3,815 × x3 + 0,416 × x4 = 0,595  0,259 × x1 + 0,361 × x2 + 0,281 × x3 + 3,736 × x4 = 0,389. |
| 11 | 4,503 × x1 + 0,219 × x2 + 0,527 × x3 + 0,396 × x4 = 0,553  0,259 × x1 + 5,121 × x2 + 0,423 × x3 + 0,206 × x4 = 0,358  0,413 × x1 + 0,531 × x2 + 4,317 × x3 + 0,264 × x4 = 0,565  0,327 × x1 + 0,412 × x2 + 0,203 × x3 + 4,851 × x4 = 0,436. |
| 12 | 5,103 × x1 + 0,293 × x2 + 0,336 × x3 + 0,270 × x4 = 0,745  0,179 × x1 + 4,912 × x2 + 0,394 × x3 + 0,375 × x4 = 0,381  0,189 × x1 + 0,321 × x2 + 2,875 × x3 + 0,216 × x4 = 0,480  0,317 × x1 + 0,165 × x2 + 0,386 × x3 + 3,934 × x4 = 0,552. |
| 13 | 5,554 × x1 + 0,252 × x2 + 0,496 × x3 + 0,237 × x4 = 0,442  0,580 × x1 + 4,953 × x2 + 0,467 × x3 + 0,028 × x4 = 0,464  0,319 × x1 + 0,372 × x2 + 8,935 × x3 + 0,520 × x4 = 0,979  0,043 × x1 + 0,459 × x2 + 0,319 × x3 + 4,778 × x4 = 0,126. |
| 14 | 2,998 × x1 + 0,209 × x2 + 0,315 × x3 + 0,281 × x4 = 0,108  0,163 × x1 + 3,237 × x2 + 0,226 × x3 + 0,307 × x4 = 0,426  0,416 × x1 + 0,175 × x2 + 3,239 × x3 + 0,159 × x4 = 0,310  0,287 × x1 + 0,196 × x2 + 0,325 × x3 + 4,062 × x4 = 0,084. |
| 15 | 5,452 × x1 + 0,401 × x2 + 0,758 × x3 + 0,123 × x4 = 0,886  0,785 × x1 + 2,654 × x2 + 0,687 × x3 + 0,203 × x4 = 0,356  0,402 × x1 + 0,244 × x2 + 4,456 × x3 + 0,552 × x4 = 0,342  0,210 × x1 + 0,514 × x2 + 0,206 × x3 + 4,568 × x4 = 0,452. |
| 16 | 2,923 × x1 + 0,220 × x2 + 0,159 × x3 + 0,328 × x4 = 0,605  0,363 × x1 + 4,123 × x2 + 0,268 × x3 + 0,327 × x4 = 0,496  0,169 × x1 + 0,271 × x2 + 3,906 × x3 + 0,295 × x4 = 0,590  0,241 × x1 + 0,319 × x2 + 0,257 × x3 + 3,862 × x4 = 0,896. |

|  |  |
| --- | --- |
| **№** | **Система уравнений** |
| 17 | 5,482 × x1 + 0,358 × x2 + 0,237 × x3 + 0,409 × x4 = 0,416  0,580 × x1 + 4,953 × x2 + 0,467 × x3 + 0,028 × x4 = 0,464  0,319 × x1 + 0,372 × x2 + 8,935 × x3 + 0,520 × x4 = 0,979  0,043 × x1 + 0,459 × x2 + 0,319 × x3 + 4,778 × x4 = 0,126. |
| 18 | 3,738 × x1 + 0,195 × x2 + 0,275 × x3 + 0,136 × x4 = 0,815  0,519 × x1 + 5,002 × x2 + 0,405 × x3 + 0,283 × x4 = 0,191  0,306 × x1 + 0,381 × x2 + 4,812 × x3 + 0,418 × x4 = 0,423  0,272 × x1 + 0,142 × x2 + 0,314 × x3 + 3,935 × x4 = 0,352. |
| 19 | 3,910 × x1 + 0,129 × x2 + 0,283 × x3 + 0,107 × x4 = 0,395  0,217 × x1 + 4,691 × x2 + 0,279 × x3 + 0,237 × x4 = 0,432  0,201 × x1 + 0,372 × x2 + 2,987 × x3 + 0,421 × x4 = 0,127  0,531 × x1 + 0,196 × x2 + 0,236 × x3 + 5,032 × x4 = 0,458. |
| 20 | 5,482 × x1 + 0,617 × x2 + 0,520 × x3 + 0,401 × x4 = 0,823  0,607 × x1 + 4,195 × x2 + 0,232 × x3 + 0,570 × x4 = 0,152  0,367 × x1 + 0,576 × x2 + 8,193 × x3 + 0,582 × x4 = 0,625  0,389 × x1 + 0,356 × x2 + 0,207 × x3 + 5,772 × x4 = 0,315. |
| 21 | 3,345 × x1 + 0,329 × x2 + 0,365 × x3 + 0,203 × x4 = 0,305  0,125 × x1 + 4,210 × x2 + 0,402 × x3 + 0,520 × x4 = 0,283  0,314 × x1 + 0,251 × x2 + 4,531 × x3 + 0,168 × x4 = 0,680  0,197 × x1 + 0,512 × x2 + 0,302 × x3 + 2,951 × x4 = 0,293. |
| 22 | 4,247 × x1 + 0,275 × x2 + 0,397 × x3 + 0,239 × x4 = 0,721  0,466 × x1 + 4,235 × x2 + 0,264 × x3 + 0,358 × x4 = 0,339  0,204 × x1 + 0,501 × x2 + 3,721 × x3 + 0,297 × x4 = 0,050  0,326 × x1 + 0,421 × x2 + 0,254 × x3 + 3,286 × x4 = 0,486. |
| 23 | 3,476 × x1 + 0,259 × x2 + 0,376 × x3 + 0,398 × x4 = 0,871  0,425 × x1 + 4,583 × x2 + 0,417 × x3 + 0,328 × x4 = 0,739  0,252 × x1 + 0,439 × x2 + 3,972 × x3 + 0,238 × x4 = 0,644  0,265 × x1 + 0,291 × x2 + 0,424 × x3 + 3,864 × x4 = 0,581. |
| 24 | 3,241 × x1 + 0,197 × x2 + 0,643 × x3 + 0,236 × x4 = 0,454  0,257 × x1 + 3,853 × x2 + 0,342 × x3 + 0,427 × x4 = 0,371  0,324 × x1 + 0,317 × x2 + 2,793 × x3 + 0,238 × x4 = 0,465  0,438 × x1 + 0,326 × x2 + 0,483 × x3 + 4,229 × x4 = 0,822. |

|  |  |
| --- | --- |
| **№** | **Система уравнений** |
| 25 | 4,405 × x1 + 0,472 × x2 + 0,395 × x3 + 0,253 × x4 = 0,623  0,227 × x1 + 2,957 × x2 + 0,342 × x3 + 0,327 × x4 = 0,072  0,419 × x1 + 0,341 × x2 + 3,238 × x3 + 0,394 × x4 = 0,143  0,325 × x1 + 0,326 × x2 + 0,401 × x3 + 4,273 × x4 = 0,065. |
| 26 | 2,974 × x1 + 0,347 × x2 + 0,439 × x3 + 0,123 × x4 = 0,381  0,242 × x1 + 2,895 × x2 + 0,412 × x3 + 0,276 × x4 = 0,721  0,249 × x1 + 0,378 × x2 + 3,791 × x3 + 0,358 × x4 = 0,514  0,387 × x1 + 0,266 × x2 + 0,431 × x3 + 4,022 × x4 = 0,795. |
| 27 | 3,452 × x1 + 0,458 × x2 + 0,125 × x3 + 0,236 × x4 = 0,745  0,254 × x1 + 2,458 × x2 + 0,325 × x3 + 0,126 × x4 = 0,789  0,305 × x1 + 0,125 × x2 + 3,869 × x3 + 0,458 × x4 = 0,654  0,423 × x1 + 0,452 × x2 + 0,248 × x3 + 3,896 × x4 = 0,405. |
| 28 | 2,979 × x1 + 0,427 × x2 + 0,406 × x3 + 0,348 × x4 = 0,341  0,273 × x1 + 3,951 × x2 + 0,217 × x3 + 0,327 × x4 = 0,844  0,318 × x1 + 0,197 × x2 + 2,875 × x3 + 0,166 × x4 = 0,131  0,219 × x1 + 0,231 × x2 + 0,187 × x3 + 3,276 × x4 = 0,381. |
| 29 | 2,048 × x1 + 0,172 × x2 + 0,702 × x3 + 0,226 × x4 = 0,514  0,495 × x1 + 4,093 × x2 + 0,083 × x3 + 0,390 × x4 = 0,176  0,277 × x1 + 0,368 × x2 + 4,164 × x3 + 0,535 × x4 = 0,309  0,766 × x1 + 0,646 × x2 + 0,767 × x3 + 5,960 × x4 = 0,535. |
| 30 | 2,389 × x1 + 0,273 × x2 + 0,126 × x3 + 0,418 × x4 = 0,144  0,329 × x1 + 2,796 × x2 + 0,179 × x3 + 0,278 × x4 = 0,297  0,186 × x1 + 0,275 × x2 + 2,987 × x3 + 0,316 × x4 = 0,529  0,197 × x1 + 0,219 × x2 + 0,274 × x3 + 3,127 × x4 = 0,869. |